KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ
YAZ DÖNEMİ QUİZ SORU VE ÇÖZÜMLERİ

1) De Moivre Formülünü kullanarak $z^3+3i=0$ denkleminin tüm köklerini bulunuz.

Çözüm: $z^3+3i=0 \Rightarrow z^3=-3i$, $|-3i|=3$,

$\arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (veya $\arg(-3i) = \frac{3\pi}{2}+2k\pi$) $k\in\mathbb{N}$

$$z^3 = |-3i|.e^{i\arg(-3i)} = 3.e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \Rightarrow$$

$$z=z_k = \left(3.e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{3}.e^{i\left(\frac{-\pi/2+2k\pi}{3}\right)}, \quad k\in\mathbb{N}$$

$k=0,1,2$ için farklı değer olur. $\Rightarrow$

$$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{3}.e^{i\left(\frac{-\pi}{2}/3\right)} = \sqrt[3]{3}.e^{-\pi/6} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\pi/6 - i\sin\pi/6\right)$$

$$\boxed{z_0 = \sqrt[3]{3}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i.\frac{1}{2}\right)}$$

$$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{3}.e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{3}.e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{3}.\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sqrt[3]{3}.\left(0+i.1\right) \Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt[3]{3}.i}$$

$$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{3}.e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{3}.e^{\frac{7\pi}{6}i} = \sqrt[3]{3}.\left[\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right]$$

$$=\sqrt[3]{3}.\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right]$$

$$\zeta = \left\{\sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right),\ i.\sqrt[3]{3},\ -\sqrt[3]{3}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right\}$$

2) $|w|<1$ olmak üzere

$$|z|\le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| \le 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: " $\Rightarrow$ ": $|z|\le 1$ olsun.

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|^2 = \left(\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right).\overline{\left(\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right)} = \frac{(z-w)(\bar{z}-\bar{w})}{(1-\bar{w}z)(1-w\bar{z})} =$$

$$= \frac{z\bar{z}-z\bar{w}-w\bar{z}+w\bar{w}}{1-z\bar{w}-w\bar{z}+z\bar{z}w\bar{w}} = \frac{|z|^2+|w|^2-2Re(z,\bar{w})}{1-2Re(z\bar{w})+|z|^2|w|^2}$$

$(1-|z|^2)(1-|w|^2) \geq 0$ olduğundan $|z|^2+|w|^2 \leq 1+|z|^2 \cdot |w|^2$

bulunur. Buradan $|z|^2+|w|^2-2Re(z\bar{w}) \leq 1-2Re(z\bar{w})+|z|^2|w|^2$

$\Rightarrow \left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|^2 = \dfrac{|z|^2+|w|^2-2Re(z\bar{w})}{1-2Re(z\bar{w})+|z|^2|w|^2} \leq 1$ olması demektir.

ii) "$\Leftarrow$": $z' = \dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}$, $w' = -w$ olsun.

$z = \dfrac{z'+w}{1+\bar{w}z'} = \dfrac{z'-w'}{1-\bar{w'}z'}$ olur.

$|w'| = |w| < 1$ ve $|z'| = \left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| \leq 1$ olduğundan

1. kısımdan dolayı $|z| = \left|\dfrac{z'-w'}{1-\bar{w'}z'}\right| \leq 1$ olur.

③ $2<|z|<3$ olduğuna göre $\left|\dfrac{z^2-i}{z+i}\right|$ kompleks ifadesi için birer alt ve üst sınır bulunuz.

Çözüm:

$\left|\dfrac{z^2-i}{z+i}\right| \leq \dfrac{|z|^2+|i|}{||z|-|i||} = \dfrac{|z|^2+1}{||z|-1|}$ --- $(*)$

$2<|z|<3 \Rightarrow |z|^2+1$ ve $\dfrac{1}{||z|-1|}$ ifadeleri için bir üst sınır bulalım:

$2<|z|<3 \Rightarrow 2-1<|z|-1<3-1 \Leftrightarrow 1<|z|-1<2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{||z|-1|} < \dfrac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow$ --- (2)

$2<|z|<3 \Leftrightarrow 4<|z|^2<9 \Leftrightarrow 4+1<|z|^2+1<9+1 \Leftrightarrow 5<|z|^2+1<10$ --- (1)

(1) ve (2) $(*)$ da yerine yazılırsa

$\left|\dfrac{z^2-i}{z^2+i}\right| \leq \dfrac{|z|^2+1}{||z|-1|} < 10 \cdot 1 = 10$ üst sınır

$$\left|\frac{z^2-i}{z+i}\right| = \frac{|z^2-i|}{|z+i|} \geq \frac{|\,|z|^2-|i|\,|}{|z|+|i|} = \frac{|\,|z|^2-1\,|}{|z|+1} \quad \ldots (*)$$

$2<|z|<3 \iff 4<|z|^2<9 \iff 4-1<|z|^2-1<9-1 \iff$

$\iff 3<|z|^2-1<8 \quad \ldots (1)$

$2<|z|<3 \iff 2+1<|z|+1<3+1 \iff 3<|z|+1<4$

$\iff \frac{1}{4}<\frac{1}{|z|+1}<\frac{1}{3} \quad \ldots (2)$

(1),(2) $(**)$ da yerine yazılırsa ;

$\left|\frac{z^2-i}{z+i}\right| \geq 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ alt sınırı elde edilir.

(4) $\sin z$ nin reel ve sanal kısımlarını bulunuz. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$ ve $e^{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, i))}$ sayılarını $a+ib$ şeklinde yazınız.

<u>Çözüm:</u> $\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$ old.,

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+i\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cosh 1 + i\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sinh 1$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^1+e^{-1}}{2}\right)+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{e^1-e^{-1}}{2}\right)$ bulunur.

$e^{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, i))} = ?$ $\quad \mathrm{Log}\, i = \ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}i$

$\mathrm{Log}\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left|i\frac{\pi}{2}\right| + i\,\mathrm{Arg}\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}$ ol.

$e^{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, i))} = e^{\mathrm{Log}\left(\ln\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}$ bul.